TP3 PyE | Variables Aleatorias Especiales | UTN

① Diez refrigeradores de cierto tipo han sido devueltos a un distribuidor debido a la presencia de un ruido oscilante agudo cuando el refrigerador está funcionando. Supongamos que 4 de estos 10 refrigeradores tienen compresores defectuosos y los otros 6 tienen problemas más leves. Si se examinan al azar 5 de estos 10 refrigeradores y se define la v.a. X: "el número entre los 5 examinados que tienen un compresor defectuoso". Indicar

a) la distribución de la v.a. X

$$X \sim H(N, D, n) \rightarrow N = 10 \ (\# \text{refrig}),\ D \overset{\text{defect}}{=} 4,\ n \overset{\text{muestra}}{=} 5$$

$$\boxed{X \sim H(10, 4, 5)}$$ ✓

b) la prob. de que no todos tengan fallas leves → al menos 1 sea Defectuoso

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = \boxed{0{,}9762 = P(X \geq 1)}$$ ✓

$$P(X=0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{6}{5}}{\binom{10}{5}} = \frac{1}{42} = 0{,}0238$$

c) la prob. de que a lo sumo cuatro tengan fallas de compresor

$$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$$

$$= 1 - \underbrace{P(X=5)}_{0} = 1$$

0 → son solo 4 defectuosos → NUNCA pueden ser 5 → $P(X=5) = 0$

$$\boxed{P(X \leq 4) = 1}$$ ✓

$6V \to 1L, 5E$

$8M \to 5L, 3E$

2) Un grupo de amigos del secundario se reúnen en la casa de Laura para comer un asado. En este grupo hay 6 varones y 8 mujeres, contando a Laura. De las mujeres, 5 estudian Letras y el resto, Exactas, mientras que de los varones, solo uno estudia Letras y el resto Exactas.

a) Si las primeras en llegar a la casa son 3 chicas ¿cuál es la prob. de que las 3 estudien lo mismo que Laura?

3 chicas + Laura = 4 chicas → para que estudien las 4 lo mismo analizo la prob de que las 4 estudien Letras, ya que las 4 no pueden estudiar Exactas, pues solo 3 estudian.

A: "las tres primeras en llegar estudian Letras" — Laura es L → quedan 4 entre 7

$$P(A) = \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{35} \rightarrow \boxed{P(A) = \frac{4}{35}} \checkmark \qquad \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}$$

b) Si 3 cualesquiera de ellos hacen el asado ¿cuál es la prob. de que estudien lo mismo?

L: estudian Letras

E: " Exactas

B: "tres (de todos) estudian lo mismo"

$$P(B) = P(L=3) + P(E=3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} + \frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} = \boxed{\frac{19}{91} = P(B)} \checkmark$$

c) Si se seleccionan 2 al azar de este conj. de amigos y se define la v.a. X: "cant. de amigos que estudian letras entre los dos elegidos" hallar el valor esperado y la varianza de X

$X \sim H(N, D, m)$, $N = 14$ (# amigos), $D = 6$ ← estudian letras, $m = 2$ → grupo de 2

$X \sim H(14, 6, 2)$

$$E(X) = m \cdot \frac{D}{N} = 2 \cdot \frac{6}{14} = 6/7 \longrightarrow \boxed{E(X) = 6/7} \checkmark$$

$$V(X) = \frac{N-n}{N-1} \cdot m \cdot \frac{D}{N}\left(1 - \frac{D}{N}\right) = \frac{12}{13} \cdot 2 \cdot \frac{6}{14} \cdot \left(1 - \frac{6}{14}\right) = \frac{288}{637}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{288}{637}} \checkmark$$

NOTA

$H(\overset{N}{40}, \overset{D}{10}, 3)$

HOJA N°
FECHA

TP3

3) En una partida de truco, asumiendo que el mazo se encuentra bien mezclado, se reparte una mano de cartas.

a) Hallar la prob. de que el jugador que recibe las primeras 3 cartas tenga envido (2 cartas del mismo palo y una diferente)

A: "el jugador que recibe las 3 primeras cartas sean envido"

$$P(A) = \left(\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{30}{38}\right) \underset{\text{permutaciones}}{3} \cdot \overset{\text{palos}}{4} = \frac{135}{247}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{135}{247}}$$ ✓

b) Hallar la prob. de que el 1° jugador tenga flor

B: "el 1° jugador recibe flor"

$$P(B) = \left(\frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38}\right) \cdot \underset{\text{palos}}{4} = 4 \cdot \frac{\binom{10}{3}}{\binom{40}{3}} = \boxed{\frac{12}{247} = P(B)}$$ ✓

c) Hallar la prob. de que ambos tengan flor

C: "Ambos tienen flor"

2° jugador, mismo palo en la flor q' el 1°

$$P(C) = \underset{1° \text{ jug}}{P(B)} \underbrace{\left[\left(\frac{7}{37} \cdot \frac{6}{36} \cdot \frac{5}{35}\right) 1 + \left(\frac{10}{37} \cdot \frac{9}{36} \cdot \frac{8}{35}\right) \cdot \underset{\text{los otros 3 palos}}{3}\right]}_{2° \text{ jug.}} = 0,00247$$

$$\boxed{P(C) = 0,00247}$$ ✓

d) Hallar la prob de que el 1° jugador no tenga ni flor ni envido

D: "el 1° jugador no tiene ni flor ni envido" (o sea, 3 cartas de ≠ palo)

$$P(D) = \left(\frac{10}{40} \cdot \frac{30}{39} \cdot \frac{20}{38}\right) \cdot 4 = \frac{100}{247} = \boxed{0,404 = P(D)}$$ ✓

X: "cant. cartas del mismo palo, mazo 40 cartas, mano 3

$X \sim H(40, 10, 3)$

a) $P(X=2) = \underset{4 \text{ palos}}{4} \dfrac{\binom{10}{2}\binom{30}{1}}{\binom{40}{3}} = \dfrac{135}{247}$

b) $P(X=3) = \overset{4 \text{ palos} = 4 \text{ veces}}{4} \dfrac{\binom{10}{3}\binom{30}{0}}{\binom{40}{3}} = \dfrac{12}{247}$

NOTA

④ La compañía de aviación Gran Jet ha determinado mediante un estudio estadístico que el 4% de los pasajeros que reservan un viaje a Buenos Aires - Misiones no se presentan a tomar el vuelo. Un día de mucha demanda de pasajes la empresa decide vender 72 pasajes de un vuelo con capacidad para 70 pasajeros ¿ Cuál es la prob. de que puedan viajar todos los pasajeros que se presenten a tomar vuelo?

X: 'cantidad de pasajeros que no se presentan a un vuelo entre 72 pasajeros'

$$X \sim Bi\left(72, 4/100\right)$$

tienen que viajar todos → se presentan 70 o menos → no se presentan por lo menos 2

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \overset{\text{discreta}}{=} 1 - P(X=1) - P(X=0)$$

$$P(X=0) = \binom{72}{0}\left(\frac{4}{100}\right)^0\left(\frac{96}{100}\right)^{72} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}0529089$$

$$P(X=1) = \binom{72}{1}\left(\frac{4}{100}\right)^1\left(\frac{96}{100}\right)^{71} = 72 \cdot \frac{4}{100} \cdot 0{,}0551134 = 0{,}1587$$

$$\rightarrow P(X \geq 2) = 1 - 0{,}158727 - 0{,}0529089 = 0{,}7883$$

$$\boxed{P(X \geq 2) = 0{,}7883}$$

P3

5) Se ha probado que el 25% de los neumáticos de motocicletas sufren pinchaduras en caminos de ripio durante los primeros 1000 km de uso.

¿Cuál es la prob. de que entre los próximos 6 neumáticos que se prueben:

a) Al menos 2 sufran pinchaduras?

X: "cantidad de neumáticos que pinchen de un conj. de 6"

$$X \sim Bi(6;0{,}25)$$

al menos 2 ; va discreta

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

$$= 1 - \binom{6}{0} 0{,}25^0\, 0{,}75^6 - \binom{6}{1} 0{,}25^1\, 0{,}75^5 =$$

$$= 1 - \frac{729}{4096} - \frac{729}{2048} = \frac{1909}{4096}$$

$$\boxed{P(X \geq 2) = 0{,}466}$$

b) A lo sumo 3 no sufran pinchaduras? $\quad p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

Y: "cant de neumáticos que NO sufren pinchaduras de un conj. de 6"

$$Y \sim Bi(6; 0{,}75)$$

$$P(Y \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} P(Y=i) = \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{i} \cdot 0{,}75^i \cdot 0{,}25^{6-i} = \frac{347}{2048}$$

$$\boxed{P(Y \leq 3) = 0{,}169}$$

para mí hay error en la respuesta de la guía

A lo sumo 3 NO sufren pinchaduras:

0 NO sufren pinchaduras → 6 sufren pinchaduras

1 " " " → 5 " "

2 " " " → 4 " "

3 " " " → 3 sufren pinchaduras

$$P(X \geq 3) = 0{,}169$$

c) No se supere el número esperado de pinchaduras?

$$E(X) = n \cdot p = 6 \cdot 0{,}25 = 1{,}5$$

$$P(X \leq E(X)) = P(X \leq 1{,}5) = P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) =$$

$$= \frac{2187}{4096}$$

$$\boxed{P(X \leq E(X)) = 0{,}534}$$

NOTA

P3

6) Al probar motores para cuatriciclos se encontró que el 5% no superaban la prueba.

a) Hallar la prob. de que en los próximos 5 motores al menos uno no pase la prueba

X: "cantidad de motores que no pasen la prueba, dentro de los próx. 5"

$X \sim Bi\,(n=5,\ p=0{,}05)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X<1) \overset{\text{discreta}}{=} 1 - \underbrace{P(X=0)}_{CA} = 1 - 0{,}7738 = 0{,}2262$$

$$CA \rightarrow P(X=0) = \binom{5}{0}\left(\frac{5}{100}\right)^0\left(\frac{95}{100}\right)^5 = 0{,}7738$$

$$\boxed{P(X \geq 1) = 0{,}2262}$$ ✓

b) Hallar el número de motores que se espera pasen la prueba entre los próximos 20.

Y: "cant. motores que pasan la prueba, entre los próximos 20"

$Y \sim Bi\,(20,\ 0{,}95)$

$$E(Y) = 20 \times 0{,}95 = 19 \qquad \boxed{E(Y) = 19}$$ ✓ consultado con la profesora (el resultado de la guía tiene un error)

c) Hallar la probabilidad de que no todos pero sí la mayoría de los próximos 7 motores no pasen la prueba

W: "cant. de motores que no pasan la prueba en los próximos 7 motores"

"no todos" $\rightarrow W < 7$

"la mayoría" $\rightarrow W > 3$

$W \sim Bi\,(7,\ 0{,}05)$

0 1 2 3 4 5 6 7

$$P(3 < W < 7) = P(W=4) + P(W=5) + P(W=6) = 0{,}000194$$

- $P(X=4) = \binom{7}{4}(0{,}05)^4(0{,}95)^3 = 0{,}000187$
- $P(X=5) = \binom{7}{5}(0{,}05)^5(0{,}95)^2 = 0{,}0000059$
- $P(X=6) = \binom{7}{6}(0{,}05)^6(0{,}95)^1 = 0{,}000000\,1039$

$$\boxed{P(3<W<7) = 0{,}00019}$$ ✓

7) En una empresa el 30% de los empleados (con más de 2000 empleados) están en un proyecto de calidad, el 50% está en un proyecto de expansión y el 70% está trabajando en, al menos, uno de esos proyectos. Se seleccionan, al azar para una encuesta de satisfacción, 5 empleados de esta empresa.

a) Hallar la prob. de que, al menos 2 de los seleccionados estén, EXACTAMENTE en un proyecto

≥ 2

C: "el empleado selecc. trabaje en el Proyecto de Calidad" $P(C) = 0,3$

E: " " " " " " " de Expansión" $P(E) = 0,5$

$P(C \cup E) = 0,70$ (el empleado trabaje en AL MENOS un proyecto)

X: "cantidad de empleados que trabajan EXACTAMENTE en UN Proyecto en un grupo de 5 seleccionados"

$X \sim Bi(5, p)$

$p = P(C \cup E) = P(C) + P(E) - P(C \cap E) = 0,7 = 0,3 + 0,5 - P(C \cap E)$

$\rightarrow P(C \cap E) = 0,10$ (trabaje en 2 proyectos)

$p = (P(C) - P(C \cap E)) + (P(E) - P(C \cap E)) = 0,3 - 0,10 + 0,5 - 0,1 = 0,6$

$p = 0,6 \rightarrow X \sim Bi(5, 0.6)$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \overset{\text{discreta}}{=} 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$P(X=0) = \binom{5}{0} (0,6)^0 (0,40)^5 = \frac{32}{3125}$, $P(X=1) = \binom{5}{1} (0,60)^1 (0,40)^4 = \frac{48}{625}$

$\rightarrow P(X \geq 2) = 1 - 32/3125 - 48/625 = 2853/3125 = \boxed{0,91296 = P(X \geq 2)}$ ✓

b) Hallar la prob. de que A LO SUMO 3 estén en ambos proyectos

≤ 3 $P(C \cap E) = P$

Y: "cant. de empleados que trabajan en los 2 proyectos de un grupo de 5"

$Y \sim Bi(5, 0.10)$

$P(Y \leq 3) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = 1 - P(Y=4) - P(Y=5)$

$P(Y=4) = \binom{5}{4} (0,10)^4 (0,90)^1 = \frac{9}{20\,000}$, $P(Y=5) = \binom{5}{5} (0,10)^5 (0,90)^0 = \frac{1}{100\,000}$

NOTA

P3

$$P(Y \leq 3) = 1 - \frac{9}{20\,000} - \frac{1}{100\,000} = 0{,}99954$$

$$\boxed{P(Y \leq 3) = 0{,}99954}$$

c) Hallar la prob. de que todos los seleccionados estén en algún proyecto

W: "cant de empleados que trabajen en $\underbrace{\text{algún proyecto}}_{(CUE)}$, de un grupo de 5 seleccionados"

$p = P(CUE) = 0{,}7 \rightarrow W \sim Bi(5, 0{,}7)$

$$P(W=5) = \binom{5}{5} (0{,}70)^5 (0{,}30)^0 = \boxed{0{,}16807 = P(W=5)}$$

8 T Sea X una v.a. con distribución Binomial de parámetros n y p:

a) Demostrar que $E(X) = np$

$$Y_i = \begin{cases} 0 & \text{si es fracaso} \\ 1 & \text{si es éxito} \end{cases}$$

Sea $Y \sim Be(p)$, $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, $E(Y) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$$E(X) = E(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \underbrace{E(Y_1) + E(Y_2) + \dots + E(Y_n)}_{n \text{ términos}} = n \cdot p$$

$$E(Y_i) = p \quad \forall i \in [1, n]$$

b) Demostrar que $V(X) = n\,p(1-p)$

$E(Y^2) = 0^2 (1-p) + 1^2 p = \boxed{p = E(Y^2)}$ $\qquad E(Y)^2 = p^2$

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = p - p^2 = p(1-p) = V(Y)$$

$X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$

$$V(X) = V(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \underbrace{V(Y_1) + V(Y_2) + \dots + V(Y_3)}_{n \text{ términos}} =$$

$$= n \cdot V(Y_i) = \boxed{n \cdot p(1-p) = V(X)}$$

c) ¿Existen valores de probabilidad p para los cuales se cumpla que $V(X) = 0$? Considerando un valor de n fijo

Sí. Si $p = 0$ o $p = 1$.

d) ¿Para qué valores de p es máxima $E(X)$?

para $p = 1$ pues $E(X) = np$, $0 \leq p \leq 1 \rightarrow p = 1$ es máx.

e) ¿Para qué valores de p es máxima $V(X)$?

$V(X) = n\,p(1-p) = \overset{\text{fijo}}{n}(p - p^2)$, si $f(p) = p - p^2 \rightarrow f'(p) = 1 - 2p$

analizo p tq $f'(p) = 0 \rightarrow 1 - 2p = 0 \rightarrow \boxed{p = 1/2}$

P3

(9) (T) Sea X una v.a. Binomial con parámetros n y p. Demostrar que:

$$P(x=k+1)=\frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}\cdot P(x=k)$$

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$\boxed{P(X=k+1)}=\binom{n}{k+1}p^{(k+1)}\cdot(1-p)^{\overbrace{n-(k+1)}^{n-k-1}}=$$

$$=\frac{n!}{\underbrace{(k+1)!}_{(k+1)\,k!}\,(n-(k+1))!}\cdot p^{k}\cdot p\,(1-p)^{n-k}\cdot(1-p)^{-1}=$$

$$=\frac{n!}{(k+1)\cdot k!\,\frac{(n-k)!}{(n-k)}}\cdot p^{k}\cdot p\,\frac{(1-p)^{n-k}}{(1-p)}=$$

$$=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)}{(k+1)}\cdot\frac{p}{(1-p)}\cdot p^{k}\cdot(1-p)^{n-k}=$$

$$=\underbrace{\binom{n}{k}p^{k}(1-p)^{n-k}}_{P(X=k)}\cdot\frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}=\boxed{\frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}\cdot P(X=k)}$$

$$\therefore\quad\boxed{P(X=x=k+1)=\frac{(n-k)\,p}{(k+1)(1-p)}\cdot P(X=x=k)}$$

(10) Los autos que pasan por cierta cabina de peaje siguen un proceso de Poisson con intensidad $\lambda = 20$ autos por hora. El peaje cuesta $45 pero todos los automovilistas pagan con billetes de $50. Al empezar el día, Fabián (que trabaja en la cabina) cuenta solamente con un billete de $5.

a) ¿Cuál es la prob. de que algún automovilista se quede sin vuelto en los primeros 5 minutos?

X: "cant de automovilistas que no recibieron cambio en un tiempo de 5 minutos"

$n = 5 \quad \lambda = \frac{1}{3}$

$\lambda = 20$ autos cada 60 minutos $\rightarrow \lambda = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \rightarrow X \sim Po\left(\frac{5}{3}\right)$

$\mu = np$

"algún automovilista se queda sin recibir vuelto" y hay vuelto para 1 solo ∴

$$P(X>1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$

$r = 1$, $\mu = 5/3$ } no está en tabla

$$\bullet\ P(X=0) = e^{-\frac{5}{3}} \cdot \frac{(5/3)^0}{0!} = \boxed{e^{-5/3} = P(X=0)}$$

$$\bullet\ P(X=1) = e^{-5/3} \cdot \frac{(5/3)^1}{1!} = \boxed{\frac{5e^{-5/3}}{3} = P(X=1)}$$

$$1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - e^{-5/3} - \frac{5e^{-5/3}}{3}$$

$$\boxed{P(X>1) = 0{,}4963}$$ ✓

b) Fabián quiere salir de la cabina para tomar un café ¿Cuánto debería tardar, como mucho, si quiere q' la probabilidad de que en su ausencia no aparezca ningún auto sea 1/10?

Y: "cant. de autos que pasan por la cabina en un tiempo t"

$\lambda = 1/3$ (minutos), $n = t \rightarrow Y \sim Po\left(\frac{t}{3}\right)$.

$$P(Y=0) = 0.10$$

$$P(Y=0) = e^{-\frac{t}{3}} \cdot \frac{(t/3)^0}{0!} = e^{-t/3} = 0{,}10 \rightarrow \ln(e^{-t/3}) = \ln(0{,}10)$$

$$-\frac{t}{3} = \ln(0{,}10)$$

$$t = -\ln(0{,}10) \cdot 3 = 6{,}90 \text{ min}$$

$$\boxed{t = 6{,}9 \text{ min}}$$ ✓

NOTA

HOJA N°

FECHA

P3

(11) La cantidad de pacientes que asisten a la sala de emergencias de la localidad de "Moquehue" semanalmente, sigue una distribución de Poisson con media 3.

Se pueden asistir a 4 pacientes por semana, los que no pueden ser asistidos se derivan a la localidad de "Villa Pehuenia"

a) ¿Cuál es la probabilidad de derivar algún paciente esta semana?

X: "cantidad de pacientes que asisten a la sala de emergencia"

$$X \sim Po(\lambda)$$

"con media 3" $\rightarrow E(X) = 3 = \lambda \rightarrow X \sim Po(3)$

$$P(\text{derivar}) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{4} e^{-3} \cdot \frac{3^i}{i!} = 0{,}1847$$

$$\boxed{P(X > 4) = 0{,}185}$$

b) ¿Cuál es el número esperado de pacientes que se derivan semanalmente?

?

c) ¿Cuántos pacientes se deberían poder asistir para garantizar que no se realicen derivaciones el 90% de las semanas?

?

NOTA

HOJA N°

FECHA

P3

(12) Las llegadas a la fila de espera de una oficina del ANSSES ocurren según un proceso de Poisson de modo tal que la prob. de que no haya arribos en 5 minutos es e^{-1}.

a) Determinar qué cant. de personas se espera que lleguen a la fila en una hora

X: "cant. de personas que llegan a la fila, en 60 minutos"

$X \sim Po(\lambda . 60)$

Y: "# personas que llegan a la fila en 5 minutos" $\rightarrow Y \sim Po(\lambda 5)$

x enunciado tengo que $P(Y=0) = e^{-1} = e^{-5\lambda} . \frac{(5\lambda)^0}{0!} \rightarrow \lambda = 1/5$

$\rightarrow X \sim Po\left(\frac{1}{5} . 60\right) \rightarrow X \sim Po\ (12)$

$E(X) = \mu = 12 \rightarrow \boxed{E(X) = 12}$ ✓

b) Calcular la prob. de que pasen más de 6 minutos entre el arribo de dos personas consecutivas en la fila

Quiero calcular la prob. de que no haya llegado NINGUNA persona en 6 minutos

Z: "cant de personas que llegaron en un tiempo de 6 minutos"

$Z \sim Po\left(\frac{1}{5} . 6\right) \rightarrow Z \sim Po\ (6/5)$

$P(Z=0) = e^{-6/5} . \frac{(6/5)^0}{0!} = e^{-6/5} \cong 0{,}3012$

$\boxed{P(Z=0) = 0{,}3012}$ ✓

NOTA

13 T Demuestre que si $X \sim Po(\lambda)$ se cumple que

$$P(x=k+1) = \frac{\lambda}{(k+1)} \cdot P(x=k)$$

$X \sim Po(\lambda) \rightarrow \lambda = \mu$

$$\boxed{P(X=k+1)} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{(k+1)}}{(k+1)!} = \frac{e^{-\lambda}}{(k+1)\, k!} \cdot \underbrace{\lambda^{k} \cdot \lambda}_{\lambda^{k+1}} =$$

$$= \frac{\lambda}{k+1} \cdot \underbrace{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}}_{P(X=k)} = \boxed{\frac{\lambda}{k+1} \cdot P(X=k)}$$

$$\rightarrow \boxed{P(X=k+1) = \frac{\lambda}{k+1} \cdot P(X=k)}$$

P3

(14) De una v.a. uniforme se sabe que su valor esperado es 15 y que $P(13 \leq x \leq 18{,}5) = 0{,}55$

Hallar su varianza y $P(x \leq 13)$

$X \sim \mathcal{U}[a,b]$, $E(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

$E(X) = 15 = \frac{a+b}{2} \rightarrow \boxed{a = 30 - b}$ (I)

$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$P(13 \leq X \leq 18{,}5) = \underbrace{(18{,}5 - 13)}_{5{,}5} \cdot c = 0{,}55 \rightarrow \boxed{c = 0{,}1} = \frac{1}{b-a}$

$0{,}1 = \frac{1}{b-a} \overset{(I)}{=} \frac{1}{b-(30-b)} = \frac{1}{2b-30} = 0{,}1 \rightarrow 10 = 2b - 30$ $\boxed{b = 20}$

$\boxed{b = 20} \rightarrow \boxed{a = 10} \rightarrow \boxed{X \sim \mathcal{U}[10,20]}$

$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{100}{12} = \boxed{8{,}3\widehat{3} = V(X)}$ ✓

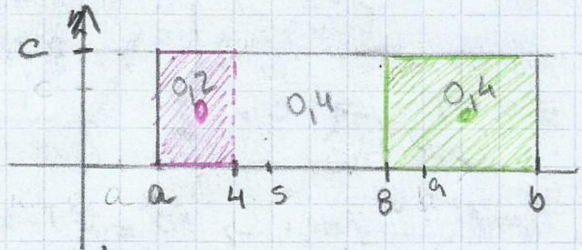
$P(X \leq 13) = F(13) = \int_{10}^{13} 0{,}1 \, dx = \boxed{\frac{3}{10} = P(X \leq 13)}$ ✓

(15) El peso de ciertos bultos se distribuye uniformemente en el intervalo (a,b). Supongamos que el 20% de los bultos pesa menos de 4 kg. y el 40% más de 8 kg.

a) Hallar la prob. de que ~~ese~~ un bulto elegido al azar pese entre 5 y 9 kg.

X: "peso, en kg, de un bulto, elegido al azar" $X \sim U[a,b]$

x en unc.: $P(X<4) = 0{,}20$ y $P(X>8) = 0{,}40$



$(b-a) \cdot c = 1$ $(F(b))$

$\Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$

tomo a y b arbitrarios

$P\big((a \le X < 4) \cup (4 \le X \le 8) \cup (8 \le X \le b)\big) = 1 =$

$= P(a \le X \le 4) + P(4 \le X \le 8) + P(8 \le X \le b) =$

$= \underbrace{P(X<4)}_{0,2} + P(4 \le X \le 8) + \underbrace{P(X>8)}_{0,4} = 1 \rightarrow P(4 \le X \le 8) = 0{,}4$

$P(4 \le X \le 8) = P(X \le 8) - P(X<4) = \frac{8-4}{c} = 0{,}4 \rightarrow \boxed{c = 10}$

$\boxed{a = 2,\ b = 12}$

$\rightarrow P(5 \le X \le 9) = \frac{(9-5) \cdot \overset{10}{c}}{(b-a) \cdot c} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$\boxed{P(5 \le X \le 9) = 0{,}4}$ ✓

b) Si se eligen ocho bultos de éstos aleatoriamente, hallar la prob. de que ninguno pese entre 5 y 9 kilos

Y: "cantidad de bultos con pesos entre 5 y 9 kg en una muestra de 8"

$Y \sim Bi(n=8,\ p=0{,}4)$

$P(Y=0) = \binom{8}{0} (0{,}4)^0 (0{,}6)^8 = 0{,}0168$

$\boxed{P(Y=0) = 0{,}0168}$ ✓

c) Hallar la cant. de bultos de estos 8 que se espera pesen entre 5 y 9 kg

$E(Y) = n \cdot p = 8 \times 0{,}4 = 3{,}2$

$\boxed{E(Y) = 3{,}2}$ ✓

NOTA

HOJA Nº

FECHA

P3

(16) La duración de un amplificador electrónico está modelada como una variable Exponencial. Si el 10% de los amplificadores tiene una duración media de 20.000 horas, mientras que la del resto es de 50000 horas, hallar:

a) la proporción de amplificadores que fallan antes de las 60 000 hs.

A: "el amplificador elegido tiene durac. media 20000 hs" $P(A)=0,10$

B: " " " " " " " 50000 hs" $P(B)=0,90$

X: "duración, en horas, de un amplificador de A" $X \sim \mathcal{E}(1/20000)$

Y: " " " " " " " de B" $Y \sim \mathcal{E}(1/50000)$

Z: " " " " " " " amplificador" $F_{(x)}\ 1-e^{-\lambda x}$

$$P(Z<60000) = P(Z<60000|A)\,P(A) + P(Z<60000|B)\,P(B) =$$

$$= P(X<60000)\,P(A) + P(Y<60000)\,P(B) =$$

cont. v.a. $= P(X\leq 60000)\,0{,}10 + P(Y\leq 60000)\,0{,}90 =$

$$= F_X(60000)\,0{,}10 + F_Y(60000)\cdot 0{,}9 =$$

$$= \left(1-e^{-\frac{60000}{20000}}\right)0{,}10 + \left(1-e^{-\frac{60000}{50000}}\right)0{,}9 = \boxed{0{,}7239 = P_{Z<60000}}$$

b) la prob. de que si la duración de un amplif. supera las 20000 horas, supere las 40000 horas

$$P(Z>40000 \mid Z>20000) = \frac{P(Z>40000 \cap Z>20000)}{P(Z>20000)} = \frac{P(Z>40000)}{P(Z>20000)} =$$

$$= \frac{1-P(Z\leq 40000)}{1-P(Z\leq 20000)} = \frac{1-[P(Z\leq 40000|A)\,\overset{0{,}10}{P(A)} + P(Z\leq 40000|B)\,\overset{0{,}9}{P(B)}]}{1-[P(Z\leq 20000|A)\,\underset{0{,}10}{P(A)} + P(Z\leq 20000|B)\,\underset{0{,}9}{P(B)}]} =$$

$$= \frac{1-(P(X\leq 40000)\cdot 0{,}10 + P(Y\leq 40000)\,0{,}90)}{1-(P(X\leq 20000)\cdot 0{,}10 + P(Y\leq 20000)\cdot 0{,}90)} =$$

$$= \frac{1-(F_X(40000)\,0.10 + F_Y(40000)\,0.90)}{1-(F_X(20000)\,0.10 + F_Y(20000)\,0.90)} =$$

$$= \frac{e^{-2}\cdot 0.10 + e^{-4/5}\cdot 0.9}{e^{-1}\,0.10 + e^{-2/5}\cdot 0.9} = 0{,}6529$$

$$\boxed{P(Z>40000 \mid Z>20000) = 0{,}6529}$$

NOTA

(17) La duración de ciertas lámparas eléctricas se distribuye exponencialmente. Se sabe, además, que el 80 % dura más de 800 horas. ¿Cuántas lámparas se deben extraer, como mínimo, para que la probabilidad de que alguna funcione más de 600 hs sea, al menos, del 90%?

X: "tiempo, en horas, que dure una lámpara" $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$P(X>800) = 0{,}8 = 1 - P(X \leq 800) = 1-(1-e^{-\lambda \cdot 800})$$

$$\rightarrow e^{-800\lambda} = 0{,}8 \rightarrow -800\lambda = \ln(0{,}8) \rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}00028}$$

Y: "cantidad de lámparas que funcionan más de 600 hs en una muestra de m lámparas"

$Y \sim Bi(m,p)$

$$p = P(X>600) = 1 - P(X \leq 600) = 1 - F(600) = 1-(1-e^{-\lambda 600}) = 0{,}8459$$

$Y \sim Bi(m, 0{,}8459)$

$$P(Y \geq 1) = 0{,}9 = 1 - P(Y<1) \rightarrow \boxed{P(Y<1) = 0{,}10}$$

$$P(Y<1) \overset{\substack{\text{discreta} \\ \downarrow}}{=} P(Y=0) = \underbrace{\binom{m}{0}}^{1} (0{,}8459)^0 (0{,}1541)^m = 0{,}1$$

$$(0{,}1541)^m = 0{,}1$$

$$\ln((0{,}1541)^m) = \ln(0{,}1)$$

$$m \ln(0{,}1541) = \ln(0{,}1)$$

$$m = \frac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}1541)} = \frac{-2{,}3025}{-1{,}8701} = 1{,}23$$

con $m=1 \rightarrow Y \sim Bi(1, 0.8459) \rightarrow P(Y \geq 1) = 1 - P(Y<1) =$
$= 1 - P(Y=0) = 0{,}8459$

con $m=2 \rightarrow Y \sim Bi(2, 0{,}8459) \rightarrow P(Y \geq 1) = 1 - P(<1) =$
$= 1 - P(Y=0) = 0{,}9762$

Con $m=1$ no llega a 90% mientras que con $m=2$ lo supera

$$\boxed{m=2} \checkmark$$

P3

(18) El ingreso anual de los jefes de familia de una cierta ciudad se puede modelar con una distribución exponencial con $\lambda = 0{,}00005$. Para clasificar a los hogares de esa ciudad se ha decidido dividir a la población en 5 grupos igualmente numerosos: clase baja, media-baja, media, media-alta y alta de modo que el 20 %. de la población pertenezca a c/u de ellos.

Hallar los salarios que indican el salto de categoría.

Obs: Los valores hallados representan los cuantiles correspondientes a 0.20, 0.40, 0.60 y 0.80 respectivamente

X: "ingreso anual, en pesos, de los jefes de familia en una ciudad"

$$X \sim \mathcal{E}(0{,}00005)$$

clase baja: $P(X \leq x_1) = 0{,}2 = F_{(x_1)} = 1 - e^{-\lambda x_1} = 1 - e^{-0{,}00005\, x_1}$

$$e^{-0{,}00005\, x_1} = 0{,}8 \rightarrow \ln(e^{-0{,}00005\, x_1}) = \ln(0{,}8)$$

$$-0{,}0005\, x_1 = \ln(0{,}8) \rightarrow \boxed{x_1 = 4462{,}87}$$

cl. media-baja: $P(X \leq x_2) = 0{,}4 = F(x_2) = 1 - e^{-0{,}00005\, x_2}$

$$e^{-0{,}00005\, x_2} = 0{,}6 \rightarrow \boxed{x_2 = 10.216{,}51}$$

clase media: $P(X \leq x_3) = 0{,}6 = F_{(x_3)} = 1 - e^{-0{,}00005\, x_3}$

$$e^{-0{,}00005\, x_3} = 0{,}4 \rightarrow \boxed{x_3 = 18.325{,}81}$$

clase media-alta: $P(X \leq x_4) = 0{,}8 = F(x_4) = 1 - e^{-0{,}00005\, x_4}$

$$e^{-0{,}00005\, x_4} = 0{,}2 \rightarrow \boxed{x_4 = 32.188{,}76}$$

clases:

baja	$ > 4462,87
media-baja	4462,87 ≤ $ < 10.261,51
media	10.261,51 ≤ $ < 18.325,81
media-alta	18.325,81 ≤ $ < 32.188,76
alta	$ ≥ 32.188,76

⑱ Sabiendo que $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ hallar la distribución de $Y = cX$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx =$$

$Y = cX$

$dy = c\,dx$

$\boxed{dx = \frac{dy}{c}}$

$$\overset{\text{c.v.}}{=} \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda \cdot \frac{y}{c}} \cdot \frac{dy}{c} =$$

$Y = cX \Rightarrow X = \frac{y}{c}$

$0 \leq x \leq \infty$

$c.0 \leq cx \leq c\infty$

$0 \leq cx \leq \infty$

$0 \leq Y \leq \infty$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c} \cdot y}\,dy = 1 - e^{-\frac{\lambda}{c} y}$$

$$\boxed{Y \sim \mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{c}\right)}$$ ✓

---

⑳ La duración de ciertas pilas se distribuyen en forma exponencial. Se sabe, además, que el 80% tiene una duración superior a 400 hs. ¿Cuántas pilas será necesario probar para obtener al menos una que dure más de 500 horas con prob. 90% ?

X: "duración, en horas, de una pila" $\quad X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$P(X > 400) = 0{,}8 = 1 - P(X \leq 400) = 1 - F(400) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda 400}\right)$$

$$\rightarrow e^{-\lambda 400} = 0{,}8 \rightarrow -400\lambda = \ln(0{,}8)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{\ln(0{,}8)}{-400} = \boxed{0{,}000558 = \lambda}$$

Y: "cantidad de pilas que duren más de 500 hs. en un lote de $\underline{n}$"

$Y \sim Bi(n, p) \quad n = ? \quad p = P(X > 500) = 1 - P(X \leq 500) =$

$= 1 - F(500) = e^{-0{,}000558 \cdot 500}$

$\rightarrow p = 0{,}7566 \rightarrow Y \sim Bi(n, 0{,}7566)$

$$P(Y \geq 1) \geq 0{,}90 \rightarrow 1 - P(Y < 1) \geq 0{,}9 \rightarrow P(Y < 1) \leq 0{,}10$$

discreta $\rightarrow P(Y = 0) \leq 0{,}10 \rightarrow P(Y=0) = \binom{n}{0} \cdot (0{,}7566)^0 (0{,}2434)^n$

$$\ln(0{,}2434^n) = n \ln(0{,}2434) = \ln(0{,}10) \rightarrow n = 1{,}629$$

$n = 2 \rightarrow P(Y=0) = 0{,}059 \rightarrow P(Y \geq 1) = 0{,}9407$

$$\boxed{n = 2}$$ ✓

NOTA

HOJA Nº 2
FECHA

P3

(19) Las baterías de una marca de celulares pueden provenir de dos países diferentes H y M. El 60% de las pilas vendidas son producidas por la fábrica de H y tienen una duración (en miles de horas) exponencial cuyo valor esperado es $\mu = 100$. El resto son producidos por la otra fábrica, con una duración (en miles de horas) con distribución uniforme [80, 130]

a) Si una batería del 1º ~~fa~~fabricante dura más de 70000 horas ¿qué prob. hay de que dure más de 90.000 horas?

en miles de horas

X: "duración de una batería de H" $\quad X \sim \mathcal{E}(1/100)$

$$P(X>90 \mid X>70) = P(X>70+20 \mid X>70) = P(X>20) =$$ exp. → pérdida de memoria

$$= 1 - P(X \leq 20) = 1 - F_{(20)} = 1 - (1 - e^{-20 \cdot \frac{1}{100}}) =$$

$$= e^{-1/5} = \boxed{0{,}8187 = P(X>90 \mid X>70)}$$ ✓

b) Calcular la prob. de que una batería vendida del stock dure a lo sumo, 90.000 hs.

Y: "duración de una batería de M" $\quad Y \sim \mathcal{U}[80, 130]$

Z: "duración, en miles de horas, de una batería"

H: "la batería elegida proviene de H" $\quad P(H) = 0{,}6$
M: " " " " " M" $\quad P(M) = 0{,}4$

$$P(Z \leq 90) = P(Z \leq 90 \mid H)\, P(H) + P(Z \leq 90 \mid M)\, P(M) =$$

$$= P(X \leq 90)\, 0.6 + P(Y \leq 90) \cdot 0{,}40 =$$

$$= (1 - e^{-\frac{90}{100}}) \cdot 0{,}6 + \frac{90-80}{130-80} \cdot 0{,}40 = \boxed{0{,}4360 = P(Z \leq 90)}$$ ✓

c) Si efectivamente la pila selecc. dura a lo sumo 90.000 hs. ¿cuál sería la prob. de que proviniera de la fábrica H?

$$P(H \mid Z \leq 90) = \frac{P(Z \leq 90 \mid H) \cdot P(H)}{P(Z \leq 90 \mid H)\, P(H) + P(Z \leq 90 \mid M)\, P(M)} = \frac{(1 - e^{-9/10})\, 0{,}6}{0{,}4360} =$$

$$= 0{,}8165$$

$$\boxed{P(H \mid Z \leq 90) = 0{,}8165}$$ ✓

NOTA

(22) El número de clientes que atiende un cajero de banco sigue una distribución de Poisson con intensidad de 2 clientes cada 15 minutos.

a) ¿Cuál es la prob. de que el tiempo de atención de un cliente resulte superior a 20 minutos?

$\overset{\lambda}{\frac{2}{15}} \cdot \overset{t}{1}$

X: "cant. de clientes atendidos por minuto" $X \sim Po\left(\frac{2}{15}\right)$

Y: "tiempo en minutos que se tarda en atender a un cliente". $Y \sim \mathcal{E}(2/15)$

$$P(Y>20) = 1-P(Y\leq 20) = 1-F(20) = e^{-20 \cdot 2/15} = \boxed{0{,}06948 = P(Y\geq 20)}$$

b) ¿Cuál es la prob. de que se demore más de 10 minutos en atender a un cliente?

$$P(Y>10) = 1-P(Y\leq 10) = 1-F(10) = e^{-10 \cdot \frac{2}{15}} = \boxed{0{,}2636 = P(Y>10)}$$

c) Si se demoró más de 1/2 hora en atender a un cliente, hallar la prob. de que esa atención se demore más de 40 min.

$$P(Y>40 \mid Y>30) = P(Y>30+10 \mid Y>30) \overset{\text{falta de memoria}}{=} \boxed{P(Y>10) = 0{,}2636}$$

d) Comparar los resultados de los dos items anteriores y explicar.

Resulta ser lo mismo por la característica de "Pérdida de memoria" de una v.a. con distribución exponencial.

e) ¿Cuál es la prob. de que en menos de 4 horas se atiendan 30 clientes?

Z: "tiempo, en minutos, que se tardan en atender 30 clientes"

$$Z \sim \Gamma\left(30, \frac{15}{2}\right) \longrightarrow V \sim Po\left(\frac{2}{15} \cdot 240\right) \longrightarrow \underset{\text{discr}}{V \sim Po(32)}$$

$$P(Z<240) \overset{\text{cont}}{=} P(Z\leq 240) = P(V\geq 30) = 1-P(V<30) \overset{\text{discr}}{=} 1-P(V\leq 29) =$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{k=29} e^{-32} \cdot \frac{32^k}{k!} = 1-0{,}338 = 0{,}662$$

calculadora

$$\boxed{P(Z<240) = 0{,}662}$$

HOJA N°

FECHA

(23) Los mensajes que llegan al nodo A de un sist. de comunicación de datos, son puestos en paquetes antes de ser transmitidos por la red. Si la llegada de mensajes a este nodo sigue una distribución Poisson con una intensidad de 30 mensajes por minuto y sabiendo que se utilizan 6 mensajes para formar un paquete

a) ¿cuál es el tiempo promedio necesario para formar un paquete, esto es, el tiempo que transcurre hasta que lleguen los seis mensajes al nodo?

X: "cant de mensajes que llegan al nodo A en 1 minuto" $X \sim Po(30)$

Y: "tiempo transcurrido hasta la 6° falla" $Y \sim \Gamma\left(\underset{\alpha}{6}, \frac{1}{30}\right)$

$E(Y) = \alpha\beta = 6 \cdot \frac{1}{30} = \boxed{0{,}2 \text{ minutos} = \text{tiempo prom.}} = 12 \text{ seg.}$ ✓

b) ¿Cuál es la varianza del tiempo necesario para formar el paquete?

$V(Y) = \alpha\beta^2 = 6 \cdot \frac{1}{30^2} = 0{,}00666$

?

c) ¿cuál es la prob. de formar un paquete en menos de 12 seg?

W: "cant. de mensajes recibidos en $\overbrace{0.2 \text{ minutos}}^{12 \text{ segundos}}$" $W \sim Po(30 \times 0{,}2)$

$W \sim Po(\underset{\mu}{6})$

$P(W \geq 6) = 1 - P(W < 6) \overset{\text{w discreta}}{=} 1 - P(W \leq 5) = 1 - \overset{\text{tabla}}{0{,}4457} = 0{,}5543$

$\boxed{P(\text{formar paq. en 12 seg}) = 0{,}5543}$ ✓

NOTA

(24) El tiempo semanal Y (en horas) durante el cual cierta máquina industrial no funciona tiene una distribución gamma con $\alpha = 3$ y $\lambda = 0{,}5$. La pérdida semanal L (en cientos de pesos) para la industria debido a este bajo está dada por

$$L = 30Y + 8$$

(3000 \$ por hora en que la máq. no funciona más 800 de costo fijo mensual)

Calcular la prob. de que se pierdan más de 18800 pesos en una semana

$$Y \sim \Gamma(3, \underbrace{2}_{\beta}) \qquad 2 = \frac{1}{0{,}5} \qquad\qquad V \sim Po\left(\tfrac{1}{2}, 6\right) \quad 1/\beta \quad \rightarrow \mu = 3$$

$$P(L > 188) = 1 - P(L \leq 188) = 1 - P((30Y + 8) \leq 188) =$$

$$= 1 - P(30Y \leq 180) = 1 - P(Y \leq 6) =$$

$$= 1 - P(V \geq 3) = \cancel{1} - \cancel{1} + P(V < 3) \underset{\text{aux.}}{=} P(V \leq 2) =$$

$$= 0{,}4232$$

$$\boxed{P(L > 188) = 0{,}4232} \checkmark$$

Si: $Y \sim \Gamma(\alpha, \beta) \rightarrow V \sim Po\left(\frac{1}{\beta}, x\right)$

$P(Y \leq x) \rightarrow P(V \geq \alpha)$

Así se "transforma" una gamma en una Poisson

(29) El tiempo semanal Y (en horas) durante el cual cierta máq. una industrial no funciona tiene distribución Γ con parámetros $\alpha = 100$ y $\lambda = 20$
La pérdida en pesos para la operación industrial está dada por

$$L = 20Y - 3Y^2$$

Calcular el valor esperado de L

Y: "tiempo semanal, en horas, durante el cual una máq. no funciona"

$$Y \sim \Gamma\left(100, \frac{1}{20}\right) \rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 100 \\ \beta = 1/20 \end{array}$$

$$E(Y) = \alpha\beta = \frac{100}{20} = \boxed{5 = E(Y)}$$

$$V(Y) = \alpha\beta^2 = \frac{100}{20^2} = \frac{1}{4} = V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = E(Y^2) - 5^2$$

$$0.25 + 25 = \boxed{E(Y^2) = 25{,}25}$$

$$\rightarrow E(L) = E(20Y - 3Y^2) = E(20Y) - E(3Y^2) = 20\,E(Y) - 3\,E(Y^2) =$$

$$= 20 . 5 - 3 . \frac{101}{4} = 24{,}25$$

$$\boxed{E(L) = 24{,}25}$$

(26) Dos componentes idénticos, A y B, funcionan en forma independiente en un sistema S. El tiempo hasta la ocurrencia de una falla para cada una de estas componentes puede considerarse una v.a. con distr. exponencial de parámetro $\alpha = (100\ hs)^{-1}$.

Obtener las funciones de distribución y de densidad de prob. para el tiempo T hasta la ocurrencia de falla del sistema S:

a) considerando que las componentes están conectadas en serie.

X: "tiempo de funcionamiento de una componente hasta la 1° falla" $X \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{100}\right)$

si trabajan en serie → el sistema S opera si AMBAS comp. operan

$$P(X>t) = P(X_A>t).P(X_B>t) = \quad \text{(indep.)}$$

$$= (1-P(X_A\le t))(1-P(X_B\le t)) =$$

$$= (\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-\frac{t}{100}})(\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-\frac{t}{100}}) = e^{-\frac{t}{100}}.e^{-\frac{t}{100}} = e^{-\frac{2t}{100}}$$

$$P(X>t) = e^{-t/50}$$

$$F_{(t)} = P(X\le t) = 1-P(X>t) = 1-e^{-t/50}$$

T_S: "el sistema trabaja con componentes en serie" $\boxed{T_S \sim \mathcal{E}xp(1/50)}$

b) considerando que los componentes están conectados en paralelo.

T_P: "el sistema trabaja con componentes en paralelo"

en paralelo → el sistema S falla cuando ambos fallan

$$P(X<t) = P(X_A<t)\ P(X_B<t) =$$

$$= (1-e^{-t/100})(1-e^{-t/100}) = \boxed{(1-e^{-t/100})^2 = F_{(t)}}$$

$$= 1-2e^{-t/100}+e^{-2t/100} = 1-2e^{-t/100}+e^{-t/50}$$

$$f_{(t)} = F'_{(t)} = \cancel{2}(1-e^{-t/100}).\frac{e^{-t/100}}{\cancel{100}\,50} = \frac{(1-e^{-\frac{t}{100}})\,e^{-\frac{t}{100}}}{50} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{t}{100}}-(e^{-\frac{t}{100}})^2}{50} = \boxed{\frac{e^{-\frac{t}{100}}-e^{-\frac{t}{50}}}{50} = f(t)}$$

P3

(27) Sea X una v.a. Normal con $\mu = 5$ y $\sigma = 10$. Hallar $Z = \frac{X-5}{10}$

a) $P(X<0) = P(X-5 < -5) = P\left(\frac{X-5}{10} < \frac{-5}{10}\right) = P(Z < -1/2) = 0{,}3085$

$\boxed{P(X<0) = 0{,}3085}$ ✓

$P(X>10) = P\left(\frac{X-5}{10} > \frac{10-5}{10}\right) = P(Z > 1/2) = 1 - P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}3085$

$\boxed{P(X>10) = 0{,}3085}$ ✓

$P(X \geq 15) = P\left(\frac{X-5}{10} \geq \frac{15-5}{10}\right) = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z<1) \overset{\text{cont}}{=} 1 - \overbrace{P(Z \leq 1)}^{0{,}8413}$

$\boxed{P(X \geq 15) = 0{,}1587}$ ✓

b) $P(-20 < X < 15) = P\left(\frac{-20-5}{10} < \frac{X-5}{10} < \frac{15-5}{10}\right) = P(-2{,}50 < Z < 1) =$

$= P(Z<1) - P(Z \leq -2{,}5) \overset{\text{cont}}{=} \overbrace{P(Z \leq 1)}^{0{,}8413} - P(Z \leq -2{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}0062$

$\boxed{P(-20 < X < 15) = 0{,}8351}$ ✓

$P(-5 \leq X \leq 30) = P\left(\frac{-5-5}{10} \leq \frac{X-5}{10} \leq \frac{30-5}{10}\right) = P(-1 \leq Z \leq 2{,}5) =$

$= P(Z \leq 2{,}5) - P(Z < -1) \overset{\text{cont}}{=} \overbrace{P(Z \leq 2{,}5)}^{0{,}9938} - \overbrace{P(Z \leq -1)}^{0{,}1587} = \boxed{0{,}8351 = P(-5 \leq X \leq 30)}$ ✓

c) el valor de x tal que $P(X > x) = 0{,}05$

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 0{,}05 \rightarrow P(X \leq x) = 0{,}95 = P\left(Z \leq \frac{x-5}{10}\right)$

$0{,}95 = P(Z \leq 1{,}65) \rightarrow \frac{x-5}{10} = 1{,}65 \rightarrow x - 5 = 16{,}5 \rightarrow \boxed{x = 21{,}5}$ ✓

con calculadora $= 1{,}6449 \rightarrow \boxed{x = 21{,}449}$ ✓

d) el valor de x tal que $P(X < x) = 0{,}23$

$P(X<x) \overset{\text{cont}}{=} P(X \leq x) = P\left(\frac{X-5}{10} \leq \frac{x-5}{10}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-5}{10}\right) = 0{,}23$

$0{,}23 = P(Z \leq -0{,}74) \rightarrow -0{,}74 = \frac{x-5}{10} \rightarrow \boxed{x = -2{,}40}$ ✓

28) Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

a) Mostrar que $P(|X-\mu| \leq 1{,}24\sigma) = 0{,}785$

$$\boxed{P(|X-\mu| \leq 1.24\sigma)} = P\left(\frac{|X-\mu|}{\sigma} \leq 1{,}24\right) = P(|Z| \leq 1{,}24) =$$

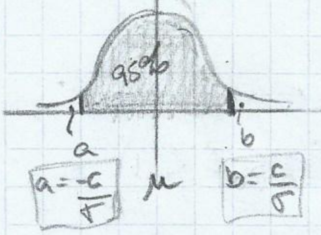
$$= P(-1{,}24 \leq Z \leq 1{,}24) = P(Z \leq 1{,}24) - P(Z < -1{,}24) =$$

$$\overset{\text{cont}}{=} P(Z \leq 1{,}24) - P(Z \leq -1{,}24) = 0{,}8925 - 0{,}1075 = \boxed{0{,}785}$$

b) Hallar el valor de c (en términos de σ) que cumple $P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = 0{,}95$

$$P(\mu - c \leq X \leq \mu + c) = P\left(\frac{\mu - c - \mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{\mu + c - \mu}{\sigma}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{c}{\sigma} \leq Z \leq \frac{c}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{\sigma}\right) - P\left(Z < -\frac{c}{\sigma}\right) \overset{\text{cont}}{=} P\left(Z \leq \frac{c}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq -\frac{c}{\sigma}\right)$$



$0.95 = Z \leq b - Z \leq a \qquad (Z \leq a) = (Z \geq b) \to$ Áreas

entre las áreas $Z \leq a$ y $Z \geq b$ tienen área $1 - 0{,}95 = 0{,}05$

$$\underbrace{P(Z \leq a) = 0{,}025}_{a = -1{,}96} \quad \text{y} \quad \underbrace{P(Z \leq b) = 0{,}975}_{b = 1{,}96}$$

$$\to \quad -\frac{c}{\sigma} = -1{,}96 \quad \text{y} \quad \frac{c}{\sigma} = 1{,}96 \checkmark \quad \to \boxed{c = 1{,}96\,\sigma} \checkmark$$

(30) La distribución de los pesos de los alumnos varones de una facultad es, aproximadamente Normal, con media $\mu = 75$ Kg. y desviación típica 7 Kg.

a) Hallar la prob. de que un alumno, elegido al azar, pese más de 95 Kg

X: "peso, en kg, de un alumno varón de una facultad" $X \sim N(75,7)$

Normalizar: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-75}{7}$

$$P(X>95) = P\left(\frac{X-75}{7} > \frac{95-75}{7}\right) = P(Z > 2{,}8571) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2{,}86) = 1 - 0{,}9979 = \boxed{0{,}0021 = P(X>95)}$$ ✓

b) Estimar el número de alumnos, entre los 15 000 de esta Facultad, con peso entre 80 y 95 kg.

$$P(80 \leq X \leq 95) = P\left(\frac{80-75}{7} \leq \frac{X-75}{7} \leq \frac{95-75}{7}\right) =$$

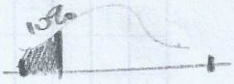
$$= P(0{,}71 \leq Z \leq 2{,}86) = P(Z \leq 2{,}86) - P(Z < 0{,}71) =$$

cont. $= P(Z \leq 2{,}86) - P(Z \leq 0{,}71) = 0{,}9979 - 0{,}7611 = 0{,}2368 = p$

Y: "cant. de alumnos que pesan entre 80 y 95 Kg de una muestra de 15000"

$$Y \sim Bi(15000,\ 0.2368) \rightarrow E(Y) = n.p = \boxed{3552 = E(Y)}$$ ✓

c) Calcular el peso no superado por el 10% de los alumnos



$$P(X < x) = 0{,}10 \xrightarrow{\text{cont.}} P\left(\frac{X-75}{7} \leq \frac{x-75}{7}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-75}{7}\right) =$$

$$\rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-75}{7}\right) = 0{,}10 \rightarrow \frac{x-75}{7} = -1{,}28 \rightarrow \boxed{x = 66{,}04}$$

d) Si se seleccionan 10 alumnos de esta población, hallar la prob. de que al menos la mitad tengan pesos superiores a 80 kg

$$p = P(X>80) = P\left(\frac{X-75}{7} > \frac{80-75}{7}\right) = P(Z > 0{,}71) = 1 - P(Z \leq 0{,}71) = \boxed{0{,}2389 = p}$$

W: "cantidad de alumnos con peso mayor a 80 kg de una muestra de 10" discreta

$$W \sim Bi(10,\ 0.2389) \rightarrow P(W \geq 5) = 1 - P(W < 5) =$$

$$= 1 - P(W=0) - P(W=1) - P(W=2) - P(W=3) - P(W=4) =$$

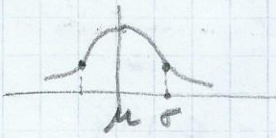
$$= 1 - 0{,}0652 - 0{,}2047 - 0{,}2891 - 0{,}242 - 0{,}1329 = \boxed{0{,}0661 = P(X>80)}$$ ✓

P3

3) La longitud de ciertas piezas fabricadas por una máq. se distribuye normalmente. Se sabe que el 15% de las piezas mide menos de 13 mm y el 10% de las piezas mide más de 14 mm. Una pieza se considera NO APTA para un proceso de ensamble si mide menos de 12,8 mm o más de 13,8 mm. Además el embalaje del producto se realiza en cajas que contienen 12 bolsas de 10 piezas cada una.

a) ¿cuál es la prob. de que una pieza selecc. al azar no sea apta?

X: "longitud, en mm, de una pieza fabricada" $X \sim N(\mu, \sigma)$ cont



$$P(X<13) = 0.15 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{13-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{13-\mu}{\sigma}\right) \quad \mathrm{I}$$

$$P(X>14) = 0.10 = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{14-\mu}{\sigma}\right) = 1-P\left(Z \leq \frac{14-\mu}{\sigma}\right) \quad \mathrm{II}$$

$$\mathrm{I}\quad P\left(Z \leq \frac{13-\mu}{\sigma}\right) = 0,15 \rightarrow \frac{13-\mu}{\sigma} \overset{\text{tabla}}{=} -1,04 \rightarrow \boxed{13+1,04\sigma = \mu}$$

$$\mathrm{II}\quad 1-P\left(Z \leq \frac{14-\mu}{\sigma}\right) = 0,10 \rightarrow P\left(Z \leq \frac{14-\mu}{\sigma}\right) = 0,90 \rightarrow \frac{14-\mu}{\sigma} \overset{\text{tabla}}{=} 1,28$$

$$\rightarrow \boxed{14-1,28\sigma = \mu} \quad \mathrm{II}$$

$$\begin{cases} 13+1,04\sigma = \mu \\ 14-1,28\sigma = \mu \end{cases} \rightarrow 13+1,04\sigma = 14-1,28\sigma$$

$$\rightarrow 2,32\sigma = 1 \rightarrow \sigma = 1/2,32 = \boxed{0,4310 = \sigma} \rightarrow \boxed{\mu = 13,45} \rightarrow \boxed{X \sim N(13.45,\ 0.431)}$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \boxed{\frac{X-13.45}{0,431} = Z} \qquad P(12.8 > X > 13.8) = 1 - \underbrace{P(12.8 \leq X \leq 13.8)}_{\text{es apta}}$$

x cont $= P(X \leq 12.8)$

$$1-P(12.8 \leq X \leq 13.8) = 1 - P(X \leq 13.8) + P(X < 12.8) =$$

$$= 1 - P\left(\frac{X-13,45}{0,431} \leq \frac{13.8-13.45}{0,431}\right) + P\left(\frac{X-13,45}{0,431} \leq \frac{12.8-13,45}{0,431}\right) =$$

$$1 - P(Z \leq 0,812) + P(Z \leq -1,508) \overset{\text{calculadora}}{=} 1 - 0,7916 + 0,0657 = 0,2745$$

$$\boxed{P(\text{no apta}) = 0,2741}$$

b) Un cliente que recibe una caja del producto selecciona al azar una bolsa y decide la aceptación del pedido si encuentra A lo sumo una pieza no apta ¿ Cuál es la prob. de que el pedido no sea rechazado ?

Caja: 12 bolsas de 10 productos c/u

A: "se elige una bolsa" $P(A) = 1/12$

$P(\text{no apto}) = 0{,}2741$ (ítem anterior)

Y: "cantidad de piezas NO aptas de una muestra de 10"

$Y \sim Bi\,(10, 0.2741)$

a lo sumo 1

$P(Y \leq 1) \underset{\text{discreta}}{=} P(Y=0) + P(Y=1) = 0{,}0406 + 0{,}1534 = 0{,}194$

- $P(Y=0) = \binom{10}{0} (0.2741)^0 (0{,}7259)^{10} = 0{,}0406$
- $P(Y=1) = \binom{10}{1} (0.2741)^1 (0{,}7259)^9 = 0{,}1534$

$$\boxed{P(Y \leq 1) = 0{,}194}$$ ✓

no coincide con la guía, pero aproxima. Varía x diferencias en aprox de μ y σ

NOTA

P3

(32) La dureza Rockwell de un metal se determina al presionar con un punto acerado la sup. del metal y después medir la profundidad de la penetración del punto. Suponga que la dureza Rockwell de cierto metal está normalmente distribuida con media 50 HR y desvío estándar de 3 HR

a) Una pieza de metal será considerada aceptable si su dureza está entre 46 y 55 ¿cuál es la prob. de que una pieza seleccionada al azar tenga una dureza aceptable?

X: "dureza, en HR, de una pieza" $\quad X \sim N(50, 3)$

$$Z = \frac{X-50}{3}$$

$$P(46 \leq X \leq 55) = P\left(\frac{46-50}{3} \leq \frac{X-50}{3} \leq \frac{55-50}{3}\right) =$$

$$= P(-1{,}3333 \leq Z \leq 1{,}6667) =$$

$$= P(Z \leq 1{,}6667) - P(Z \leq -1{,}3333) = 0{,}8609$$

↑ x continua

$$\boxed{P(\text{dureza aceptable}) = 0{,}861}$$ ✓

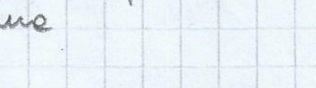
b) Si se desea que el 95% de las piezas resulten aceptables respecto de su dureza y se quiere que el intervalo de aceptabilidad sea de la forma (50-c, 50+c) ¿cuál deberá ser el valor de c?

$$P(50-c \leq X \leq 50+c) = 0.95 = P\left(\frac{50-c-50}{3} \leq \frac{X-50}{3} \leq \frac{50+c-50}{3}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{c}{3} \leq Z \leq \frac{c}{3}\right) = P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right) - P\left(Z < -\frac{c}{3}\right) =$$

continua

$$= \underbrace{P\left(Z \leq \frac{c}{3}\right)}_{0{,}975} - \underbrace{P\left(Z \leq -\frac{c}{3}\right)}_{0{,}025} = 0.95 \rightarrow$$



$\frac{c}{3} = 1{,}96 \qquad -\frac{c}{3} = -1{,}96 \longrightarrow \boxed{c = 5{,}88}$ ✓

NOTA

c) Considerando independencia entre la dureza de las piezas y seleccionando 8 piezas al azar de este metal ¿qué cantidad se espera que resulte aceptable, con el criterio establecido en (a)?

Y: "cantidad de piezas con dureza entre 46 y 55, de una muestra de 8"

$$Y \sim Bi(8, 0.861)$$

$$E(Y) = n.p = 8 \times 0{,}861 = 6{,}888 \qquad \boxed{E(Y) = 6{,}888} \checkmark$$

d) Si se seleccionan al azar, tres piezas, hallar la prob. de que la máxima de las durezas no supere 52.

↳ la máxima es ≤ 52

calc.

$$P(X \leq 52) = P\left(\frac{X-50}{3} \leq \frac{52-50}{3}\right) = P(Z \leq 0{,}667) = 0{,}74751$$

W: "cant. de piezas con dureza menor o = 52, de una muestra de 3"

$$W \sim Bi(3, 0.74751)$$

$$P(W=3) = \binom{3}{3} (0.74751)^3 (0{,}25249)^0 = 0{,}4177$$

$$\boxed{P(\text{máx dur} = 52) = 0{,}4177} \checkmark$$

P3

(33) [T] Demuestre que si X tiene una distribución Normal con parámetros μ y σ^2, entonces $Y = aX+b$ también tiene una distribución Normal ¿cuáles son los parámetros de la distribución de Y?

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\left[\begin{array}{l} -\infty \leq X \leq +\infty \\ -\infty \leq \underbrace{aX+b}_{y} \leq +\infty \end{array}\right.$$

$$Y = aX + b \rightarrow dy = a\,dx \rightarrow dx = \frac{dy}{a}$$

$$aX = Y - b$$
$$X = \frac{Y-b}{a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,dx =$$

$$\overset{c.v.}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b}{a}-\mu_x}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{dy}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{y-b-a\mu}{a}}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\frac{dy}{a} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu_x+b)}{a}\cdot\frac{1}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma a}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-(a\mu_x+b)}{a\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi}\,a\sigma}\,dy$$

$\rightarrow$ distribución normal con $\mu_y = a\mu_x + b$, $\sigma_y = a\sigma_x$

$$\boxed{Y \sim N(a\mu + b,\ a\sigma)}$$